



بسمه تعالی
دانشگاه کاشان
دانشکده علوم ریاضی

آبان ۹۵

پاسخ کوئیز اول درس ریاضی عمومی ۱

۱. یکی از ریشه‌های سوم عدد مختلط $-4\sqrt{3} - 4i$ به صورت $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ است. دوتایی (r, θ) کدام است؟

$$-4\sqrt{3} - 4i = 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 8e^{\frac{7\pi}{4}i}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r=8 \\ \theta = \frac{7\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

جواب: $(8, \frac{19\pi}{12})$

۲. معادله $z^3 = \bar{z}$ چند ریشه غیر حقیقی دارد؟

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow r^3 e^{3i\theta} = r e^{-i\theta}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^3 = r \Rightarrow r=0, 1 \\ e^{3i\theta} = e^{-i\theta} \Rightarrow \begin{cases} \cos 3\theta = \cos(-\theta) \Rightarrow 3\theta = 2k\pi \pm \theta \\ \sin 3\theta = \sin(-\theta) \Rightarrow \begin{cases} 3\theta = 2k\pi - \theta & (1) \\ 3\theta = (2k+1)\pi + \theta & (2) \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

با استفاده از (۱) و (۲) داریم

$$3\theta = 2k\pi - \theta \Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{2} \Rightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \Rightarrow i, -i$$

۳. اگر $z = \frac{-\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{-\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}$ حاصل z^3 کدام است؟

$$z = \frac{-(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})}{-(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})} = \frac{-e^{-\frac{\pi}{4}i}}{-e^{-\frac{\pi}{4}i}} = e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

$$\Rightarrow z^3 = e^{-\frac{3\pi}{4}i} = e^{\frac{\pi}{4}i} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

۴. حاصل $(1 - \sqrt{3}i)^{50}$ کدام است؟

$$z = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

$$z^{50} = 2^{50} e^{-\frac{50\pi}{3}i} = 2^{50} e^{\frac{16\pi}{3}i} = 2^{50} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2^{49} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

۵. کدام گزینه یکی از جوابهای معادله $z^2 + (2+i)z + 2i = 0$ است؟

$$\Delta = (2+i)^2 - 4i = 2-1+2i-4i = 2-1-2i = (2-i)^2$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(2+i) \pm (2-i)}{2} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-2-i+2-i}{2} = -i \\ z_2 = \frac{-2-i-2+i}{2} = -2 \end{cases}$$

۶. تعداد نقاط ناپوستگی تابع $f(x) = [x] + [x + \frac{1}{2}]$ بر بازه $(0, 2)$ چندتا است؟

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \frac{1}{4}^+} f(n) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \frac{1}{4}^-} f(n) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{در } \frac{1}{4} \text{ ناپوستگی دارد } f$$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow 1^+} f(n) = 2 \\ \lim_{n \rightarrow 1^-} f(n) = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{در } 1 \text{ ناپوستگی دارد } f$$

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \frac{3}{4}^+} f(n) = 3 \\ \lim_{n \rightarrow \frac{3}{4}^-} f(n) = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{در } \frac{3}{4} \text{ ناپوستگی دارد } f$$

در سایر نقاط عدالت (لفظ غرضی، اعدادی غیر صحیح هسته) پس f در سایر نقاط عدالت است

۷. پاسخ حد $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{6n^2 - n + 3}{3n^2 + 1} \right]$ کدام است؟

$$3n^2 + 1 < 4n^2 - n + 3 < 2(3n^2 + 1) \quad \text{برای } n > 1$$

$$1 < \frac{4n^2 - n + 3}{3n^2 + 1} < 2 \quad \text{برای } n > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{4n^2 - n + 3}{3n^2 + 1} \right] = 1$$

۸. اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{x \sin(2x)} = 1$ مقدار a کدام است؟

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos an}{n \sin 2n} \times \frac{1 + \cos an}{1 + \cos an} = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 an}{n \sin 2n (1 + \cos an)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin^2 an}{n \sin 2n (1 + \cos an)} = \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{\sin an}{n} \times \frac{\sin an}{\sin 2n} \times \frac{1}{1 + \cos an} \right)$$

$$= a \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a^2}{2} = 1 \Rightarrow a = \pm 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(n) = -\infty \quad \text{منفی نامتناهی} \quad n = \frac{1}{2}$$

۹. تابع $f(x) = \frac{3x^2 - 2x}{4x - 1}$ چند مجانب دارد؟

درمیانه دارد

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} f(n) = \pm\infty \quad \text{منفی نامتناهی}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n} = \frac{3}{4}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(n) - \frac{3}{4}n \right) = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4}n - \frac{1}{4}$$

۱۰. اگر تابع زیر بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، a و b کدامند؟

$$f(x) = \begin{cases} -2 \sin x & x \leq -\frac{\pi}{4} \\ a \sin x + b & -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \cos x & x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow -\frac{\pi}{4}^-} f(n) = \lim_{n \rightarrow -\frac{\pi}{4}^+} f(n) \Rightarrow -2 \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = a \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + b$$

$$\Rightarrow 2 = -a + b \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(n) = \lim_{n \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(n) \Rightarrow a \sin \frac{\pi}{4} + b = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow a + b = 0 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow a = -1, b = 1$$